Fachgruppe Physik, Universität zu Köln
Prof. Dr. M. Lässig
Prof. Dr. M. Grüninger

Donnerstag, 06.10.2016

12. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2016/17 `http://www.ph2.uni-koeln.de/ws1617-vorkurs.html`

1. Inverse Abbildung

Sei V ein zweidimensionaler Vektorraum mit Basis B. Die Abbildung $A : V \to V$ sei durch die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}_{BB} \quad \text{gegeben und} \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{BB} \quad .$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der inversen Abbildung A^{-1} mit Hilfe der Definition $A^{-1}A = I$ (I - Identitätsmatrix). Überprüfen Sie Ihr Ergebnis und bestimmen Sie den Vektor $\vec{x}$.

2. Krummlinige Koordinaten

Gegeben ist der Ortsvektor $\vec{a} = 3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - 4\vec{e}_z$. Wie lauten die
a) kartesischen Koordinaten,
b) Koeffizienten ρ, ϕ, z in Zylinderkoordinaten,
c) Koeffizienten r, ϕ, θ in Kugelkoordinaten?

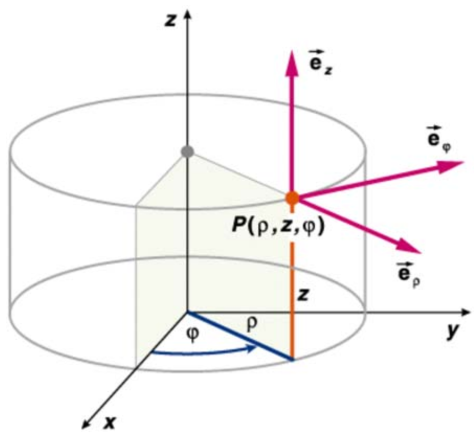

Fig. 1: Zylinderkoordinaten

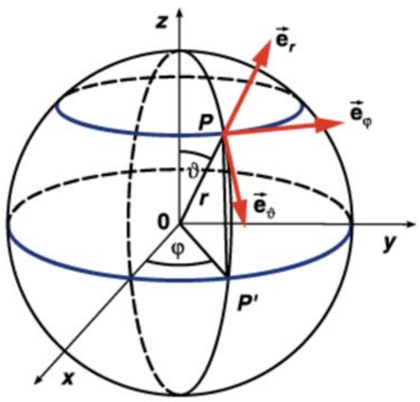

Fig. 2: Kugelkoordinaten

3. Skalarprodukt in krummlinigen Koordinaten

Gegeben sind zwei Ortsvektoren zu den Punkten (r_1, ϕ_1, θ_1) bzw. (r_2, ϕ_2, θ_2) in Polarkoordinaten.
a) Was ist ihr Skalarprodukt?
b) Was gilt für den Betrag der Vektoren?
c) Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren.
(Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die kartesischen Komponenten)

4. Ein kleiner Ausblick - Spinmatrizen

Den Spin eines Teilchens kann man sich als *inneren* Drehimpuls $\vec{S}$ vorstellen. Für ein Teilchen mit Spin 1/2 (Elektronen, Protonen, Neutronen) findet man bei der Messung der Komponente dieses Drehimpulses entlang irgendeiner vorgegebenen (Quantisierungs-)Achse immer nur entweder den Wert $+\hbar/2$ (*spin up*) oder $-\hbar/2$ (*spin down*). ($\hbar = 1.05457 \cdot 10^{-34}$ Js)
Wir wählen die z-Achse als Quantisierungsachse und beschreiben ein Teilchen mit *spin up* als Vektor $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und mit *spin down* als Vektor $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Jedes andere Teilchen lässt sich jetzt als Vektor $\vec{\chi} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ in dieser Basis schreiben (wobei a, b orts- und zeitabhängig sein könnten, was aber im folgenden vernachlässigt wird).
Die Komponenten von $\vec{S}$ können dann als Abbildungsmatrizen (Operatoren) in folgender Form geschrieben werden:
$\hat{s}_x = \hbar/2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{s}_y = \hbar/2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, und $\hat{s}_z = \hbar/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Der Erwartungswert, also der Mittelwert einer physikalischen Grösse $\hat{F}$ eines Teilchens $\vec{\chi}$ bei mehrmaligem Messen, ergibt sich in diesem Bild aus:

$$\langle \hat{F} \rangle = \frac{(a\ b)\, \hat{F} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}{a^2 + b^2}$$

a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Spins in z-Richtung für die Teilchen $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$.
b) Was gilt für $\langle \hat{s}_z \rangle$ für ein beliebiges Teilchen $\vec{\chi}$? Was bedeutet das anschaulich?
c) Berechnen Sie $\langle \hat{s}_x \rangle$ für ein beliebiges Teilchen $\vec{\chi}$. Was gilt also für die Teilchen $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$?
d) Zeigen Sie, dass $\hat{s}_x \hat{s}_y + \hat{s}_y \hat{s}_x = \hat{0}$.