Fachgruppe Physik, Universität zu Köln
Prof. Dr. M. Lässig
Prof. Dr. M. Grüninger

Mittwoch, 05.10.2016

---

11. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2016/17 `http://www.ph2.uni-koeln.de/ws1617-vorkurs.html`

1. Parallelepiped

Ein Parallelepiped sei durch drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_B \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

gegeben (B Orthonormalbasis). Bestimmen Sie sein Volumen.

2. Matrixoperationen

Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Welche Produkte zwischen je zwei dieser Matrizen lassen sich durchführen (AB, AC, etc.)?
b) Berechnen Sie alle möglichen Produkte von a), sowie auch das Produkt: $CBAB - 3CB$.

3. Drehmatrizen - 2D

Die allgemeine Form der Drehmatrizen (Drehung eines Vektors um einen festen Ursprung gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel φ) in einem zweidimensionalen Vektorraum (Basisvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) ist gegeben durch

$$\mathbb{D}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Matrix $\mathbb{D}_\varphi$ für folgende Winkel an: $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi/4,\ \varphi_3 = \pi/2,\ \varphi_4 = \pi$.

b) Veranschaulichen Sie die Wirkung von $\mathbb{D}_{\varphi_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ auf die Vektoren $\vec{a} = \vec{e}_1$ und $\vec{b} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

c) Zeigen Sie für einen beliebigen Vektor $\vec{r}$, dass die Drehung dieses Vektors um den Winkel φ, d.h. $\vec{r}\,' = \mathbb{D}_\varphi \vec{r}$, den Betrag des Vektors nicht ändert.

4. Drehmatrizen - 3D

Die Drehung eines Vektors um $\pi/2$ (gegen den Uhrzeigersinn, um den Koordinatenursprung) um die z-Achse ($\vec{e}_z$) wird entsprechend der Formel $\mathbb{D}_{z,\varphi} = (d_{ik})_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ durch die Matrix $\mathbb{D}_{z,\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dargestellt.

a) Verifzieren Sie dies, indem Sie den gedrehten Vektor $\vec{e}_x\,' = \mathbb{D}_{z,\pi/2}\vec{e}_x$, und entsprechend $\vec{e}_y\,'$ und $\vec{e}_z\,'$ berechnen.

b) Machen Sie dasselbe für die $\pi/2$-Drehung um die x-Achse, $\mathbb{D}_{x,\pi/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Berechnen Sie die Matrizen, die einer Drehung von $\pi/2$ zunächst um die z-, dann um die x-Achse ($\mathbb{D}_{x,\pi/2}\mathbb{D}_{z,\pi/2}$), und umgekehrt ($\mathbb{D}_{z,\pi/2}\mathbb{D}_{x,\pi/2}$) entsprechen. Verifizieren Sie das Ergebnis, indem Sie die Wirkung dieser Drehungen auf $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ berechnen.