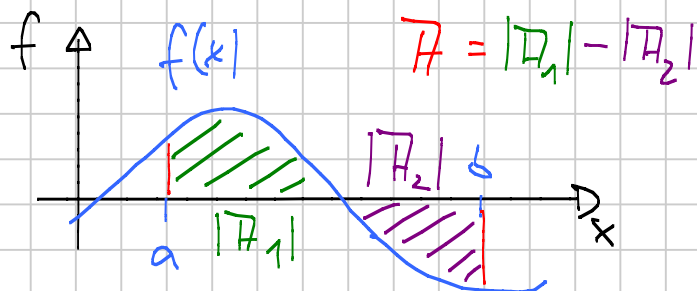
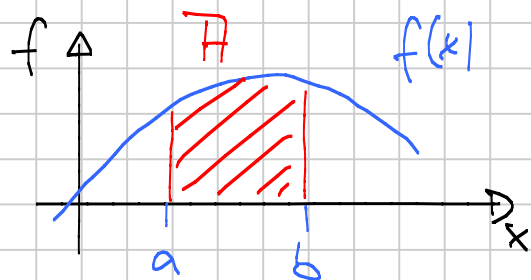


5) Integralrechnung

5.1)

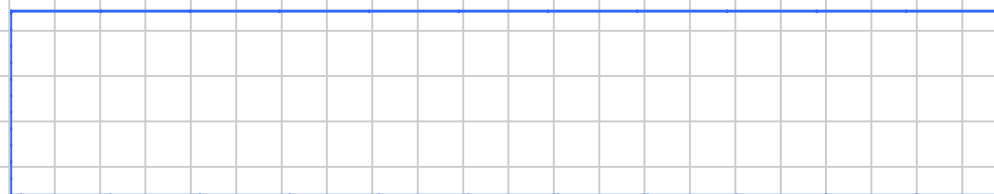


negative „Fläche“?

$$\text{grob: } \int_a^b f(x) dx :=$$

das schraffiertes Gebiet

genauer: für $a < b$
& f stetig in $[a, b]$

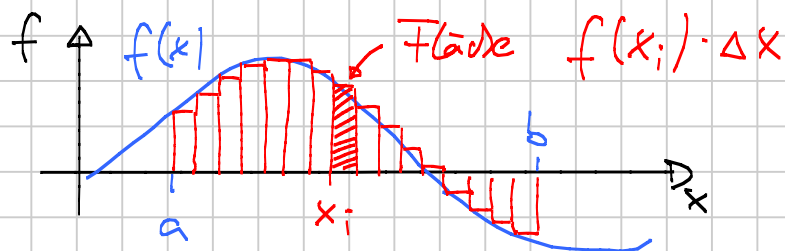


mit $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i - x_{i-1} = \Delta x = (b-a)/n$

für $a > b$:

$$\int_a^b f(x) dx =$$

5. Integrationsregeln, S. 45



41

Zur Notation:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$
 (Summe)

$\Delta x \rightarrow 0$

$x_0 = a, x_n = b$

$\int_a^b f(x) dx$
 (wie Summe)

mit

Symbol der Integrationsvariablen ist :

auch übliche Schreibweise:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Berechnung des Integrals durch Summe mit Grenzwertbildung

geht numerisch gut, ist analytisch aber meist zu umständlich.

5.2)

(alternativer Zugang zum Integral)

Def:

42

insbesondere gilt: 1/ mit $F(x)$ ist auch eine Stammfunktion für

2/ $f(x) + c$ ist Stammfunktion von $f(x)$ für $c \in \mathbb{R}, c = \text{const}$

Beispiele:

| | | | | | | | | |
|--------------------|----------------|-------|-------|-------|---------|-------|----------|----------|
| f | a | x^2 | x^a | e^x | $\ln x$ | $1/x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
| $a \in \mathbb{R}$ | \overline{F} | | | | | | | |

für $a \neq -1$

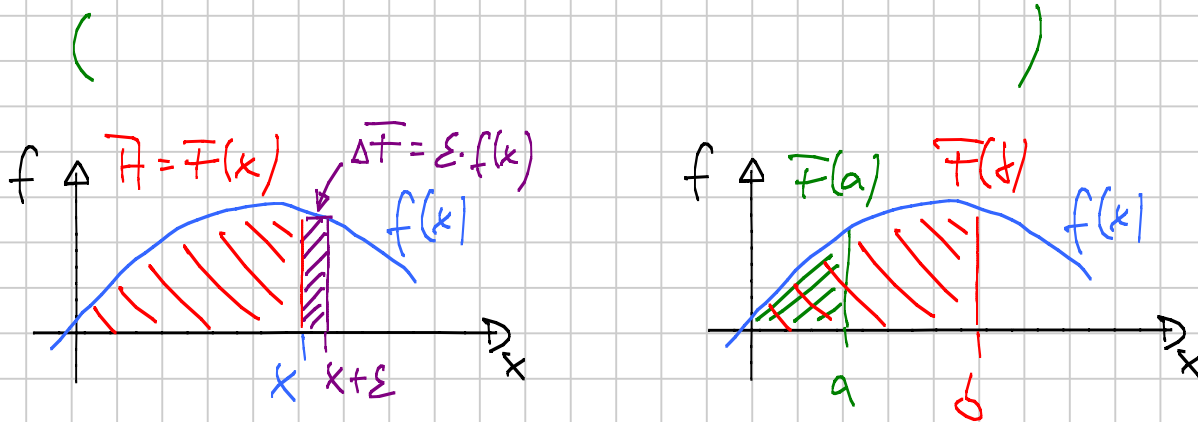
der Differential- und Integralrechnung

$\int_a^d f(x) dx$ heißt _____ und liefert _____

44

Einfache geometrische Interpretation des Hauptsatzes

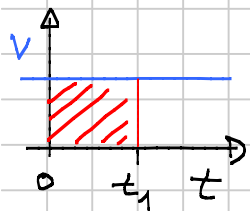
für festes $f(x)$ sei $F(x)$



dann gilt: 1)

2)

• Beispiel aus Physik: Zug mit konstanter Geschwindigkeit $v(t) = \frac{dx}{dt} = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$



$$x(t_1) - x(0) =$$

Es dreht sich nicht nur um

45

5.3)

folgen im Wesentlichen aus

$$\bullet \int_a^b f'(x) dx =$$

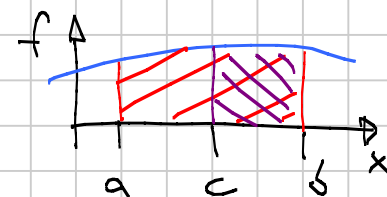
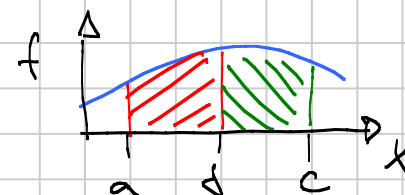
$$\bullet \int_a^b c \cdot f(x) dx =$$

CER

$$\bullet \int_a^b (f(x) + g(x)) dx =$$

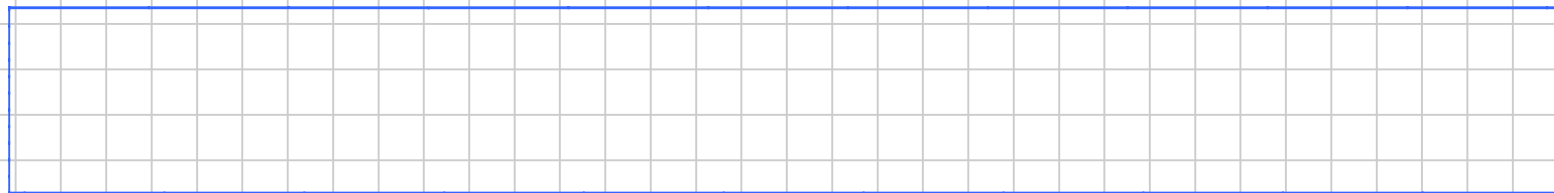
$$\bullet \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx =$$

$$\bullet \int_b^c f(x) dx =$$



5.4)

oder Produktintegration


 \Leftrightarrow

$(f \cdot g)$ ist Stammfkt. des
Integranden

 \Leftrightarrow

Hilfreich, wenn

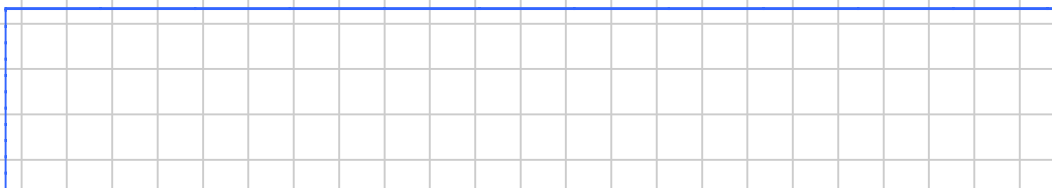
leichter anzurechnen ist als

Beispiel: 1) $\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = \left(f(x) \cdot g(x) \right) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx =$

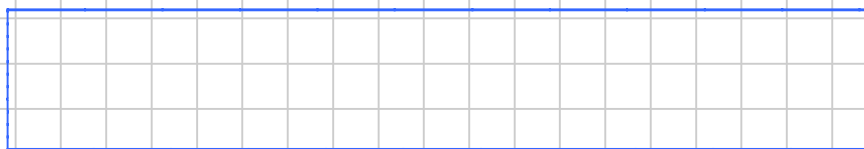
2) $\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = \left(f(x) \cdot g(x) \right) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx =$

47

folgt aus

Ersetze x durch

leicht zu merken für unbestimmtes Integral:



$$u'(t) = \frac{du}{dt}$$

Beispiel: 1) $\int_0^3 \left(\frac{1}{3}x + 4\right)^2 dx = \int \quad dt = \quad =$

$$= \left(\frac{1}{3}x + 4\right)^3 \Big|_0^3$$

Stammfkt. zu $\left(\frac{1}{3}x + 4\right)^2$

oder

2) $\int_r^s f(c \cdot x) dx = \int \quad dt$

48

3) von rechts nach links:

$$\int_a^d e^{\sin t} \cos t \, dt = \int \quad dx =$$

$$4) \int \frac{u'(t)}{u(t)} \, dt = \int \quad dt =$$

$$\int \frac{\cos t}{\sin t} \, dt =$$

• Versuch und Irrtum

Stammfunktion F_{test} "raten" und durch ableiten prüfen, ob $F_{\text{test}}' = f$.

Resultat einer Integration läßt sich leicht durch ableiten überprüfen.