Fachgruppe Physik, Universität zu Köln
Prof. Dr. M. Lässig
Prof. Dr. M. Grüninger

Donnerstag, 22.09.2016

4. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2016/17

Internetseite: *http://ph2.uni-koeln.de/ws1617-vorkurs.html*

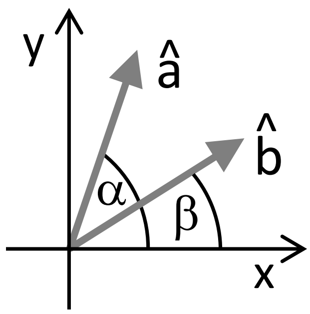
1. Trigonometrische Funktionen: Heizleistung

An einem Heizwiderstand R liegt die mit der Frequenz f (Einheit: 1/s) oszillierende Wechselspannung $U(t) = U_0 \cos(2\pi f t)$ an. Zeigen Sie, dass die Heizleistung $P(t) = U(t)^2/R$ doppelt so schnell oszilliert wie die Spannung $U(t)$ und erklären Sie dieses Ergebnis. Skizzieren Sie $U(t)$ und $P(t)$.
Hinweis: Benutzen Sie ein Additionstheorem.

2. Additionstheorem

Die Abbildung zeigt die beiden Einheitsvektoren

$$\hat{a} = \vec{a}/|\vec{a}| = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0) \qquad \text{und} \qquad \hat{b} = \vec{b}/|\vec{b}| = (\cos\beta, \sin\beta, 0).$$



Benutzen Sie die Vektormultiplikation von $\hat{a}$ und $\hat{b}$, um die beiden folgenden Additionstheoreme zu beweisen:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Hinweise:
1) Vektormultiplikation: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$.
2) Es genügt, den Bereich $0° \leq \alpha - \beta \leq 180°$ zu betrachten.

3. Sekanten- und Tangentensteigung

Gegeben sei die Funktion $x^3 - 3x$. Berechnen Sie die Steigung der Sekante durch die Kurvenpunkte an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 1.5$. Vergleichen Sie diese Sekantensteigung mit der Steigung der Tangenten an x_1 und x_2.

4. Quotientenregel

Leiten Sie ausgehend von der Produktregel $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ die Quotientenregel ab:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = ?$$

Hinweis: Wenden Sie die Produktregel auf die Funktionen $f(x)$ und $h(x) = 1/g(x)$ an.

5. Hyperbolische Funktionen

a) Skizzieren sie die hyperbolischen Funktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ , \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

b) Welche der Funktionen sind gerade und welche ungerade?

c) Zeigen Sie: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

d) Benutzen Sie $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ und berechnen Sie die ersten und zweiten Ableitungen von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$. Drücken Sie diese durch $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ aus.

e) Benutzen Sie das Ergebnis aus d) zu Berechnung der Ableitung von $\tanh(x)$.

6. Ableitungen

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionsterme:

i)	$y = 5x^3$	**ii)**	$y = 8x^2 - 5$	**iii)**	$y = x^{\frac{7}{3}}$
iv)	$y = \frac{x^3 - x}{6x^2}$	**v)**	$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$	**vi)**	$y = \sqrt{x^2 + 1}$
vii)	$y = (x^2 + 3)^4$	**viii)**	$y = 4\cos(3x + 2)$	**ix)**	$y = \ln(1 + x)$
x)	$y = xe^x \sin(x)$	**xi)**	$y = \tan(x)$	**xii)**	$y = \log_{10}(1 + x)$